



## Conceptos previos

Arthur Cayley (1821-1895) creó

la teoría de los invariantes en forma algebraica, que fue desarrollada con la introducción de los determinantes y generalizada con las matrices y formas multilineales. Asimismo investigó sobre la teoría de grupos y dio una formulación algebraica completa de la geometría proyectiva.

**CONCEPTO DE DETERMINANTE:** El concepto de determinante nació en el siglo XIX, cuando se pretendió conseguir una fórmula general que permitiera calcular directamente la solución de un sistema lineal de ecuaciones con “n incógnitas”. En pocas palabras, el determinante de una matriz cuadrada es un número que se obtiene a partir de los elementos de la matriz.

### DETERMINANTE DE ORDEN 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

### DETERMINANTE DE ORDEN 3

**METODO 1: Regla de Cramer.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{i+j} a_{ij} x |Menor|$$

**METODO 2: DE SARRUS:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

### ALGUNAS PROPIEDADES ÚTILES DE LOS DETERMINANTES:

1.- El determinante de una matriz cuadrada coincide con el de su transpuesta.

$$|A| = |A|^T$$

2.- Si se intercambian entre sí dos filas o columnas, el determinante cambia de signo.

3.- Un determinante con dos filas o columnas iguales es cero

4.- Si los elementos de una fila o columna se multiplican por un escalar, el determinante queda multiplicado por el escalar.

5.- Si dos filas o columnas son proporcionales, el determinante es cero.

6.- Si una fila o una columna de un determinante la forman términos que son suma de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes

obtenidos sustituyendo dicha fila o columna por los primeros y segundos sumandos respectivamente.

7.- Si una fila o columna es combinación lineal de otras filas o columnas, el determinante es cero.

8.- Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de otras filas o columnas a ella, el determinante no cambia.

9.- El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de dichas matrices.

## Inversa de una matriz

1.- Para una matriz de  $2 \times 2$  es problema se resuelve bastante fácil, ya que.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ se debe verificar}$$

$$1^\circ) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}, \text{ Entonces:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

2.- Para una matriz cuadrada de cualquier orden:

1º) el determinante de la matriz debe ser distinta de cero

2º) Veamos ahora como calcular  $A^{-1}$  conociendo A. se recurre para ello al metodo de Gauss, siguiendo el esquema:

A sometida a ciertos cambios da I

I sometida a ciertos cambios da  $A^{-1}$

Ejemplo se quiere calcular la inversa de  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Se procede como se indica:

$$(A/I) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se somete a la matriz A a los cambios de equivalencia que convenga para transformarla en I, y vamos sometiendo, simultáneamente a I a los mismos cambios

.Cuando A se haya transformado en I, I se habrá transformado en  $A^{-1}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{etc.}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -4 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

### Problemas propuestos:

#### 1.- CALCULAR:

$$1.1.- \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \quad 1.2.- \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad 1.3.- \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \quad 1.4.- \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.5.- \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad 1.6.- \begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} \quad 1.7.- \text{determine k en } \begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$$

$$1.8.- \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad 1.9.- \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad 1.10.- \begin{vmatrix} 1/2 & -1 & -1/3 \\ 3/4 & 1/2 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

#### 2.-Calcule el valor de la variable indicada:

$$2.1.- \text{Calcule t en: } \begin{vmatrix} t-2 & 7 \\ -4 & t+3 \end{vmatrix} = 0 \quad 2.2.- \text{Calcule t en: } \begin{vmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$2.3.- \text{Calcule t en: } \begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} \quad 2.4 \text{ t? en: } \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t+5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{vmatrix}$$

$$3.- \text{Sabiendo que: } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ calcule el valor de: } 3.1.- \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.2.- \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

#### 4.- Calcule el valor de los determinantes:

$$4.1.- \begin{vmatrix} a-1 & a+5 & a+2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad 4.2.- \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad 4.3.- \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4.4.- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}$$

5.- Resuelva las ecuaciones:

$$5.1.- \begin{vmatrix} x-1 & 2x-3 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 2 \qquad 5.2.- \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ 4 & x & 0 \end{vmatrix}$$

6.- A es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 2 .Calcule razonablemente el valor de los siguientes determinantes.

$$6.1.- |3A| + |4A| \qquad 6.2.- 10|5A^{-1}| \qquad 6.3.- |B^t xAx B^{-1}| \quad (\text{B es una matriz de orden 3})$$

$$7.- \text{Dada la matriz: } \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ calcule la inversa.}$$

$$8.- \text{Hallar la inversa de: } \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$9.- \text{Calcular la inversa de: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$10.- \text{Hallar la inversa de: } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$11.- \text{Hallar la inversa de: } 11.1.- \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad 11.2.- \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$12.- \text{Para que valores de x existe la inversa de: } \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & x \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$13.- \text{Dadas los determinantes: } A = \begin{vmatrix} 2\log_2 8 & \text{sen}^2 45^\circ & 1 \\ 3^{\log_3 2} & \cos^2 30^\circ & \log 2 - 0.00103 \\ a^{\log_a 2} & \sqrt[1/2]{2} & -2 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 4^{\log_2 2} & \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ (2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{6} & -1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \text{sen}^2 70^\circ + \cos^2 \frac{7}{18}\pi & 2^{\ln 2} & 1 \\ -1 & \ln 1 + \log 10 & 2 \end{vmatrix}$$

Calcule:

$$13.1.- |A| + |B| + |C| \qquad 13.2.- |2A| + |3A| - |3A| + |2B| \qquad 13.3.- |A||B| + |B||A|$$

14.- Calcule el valor de:

$$14.1.- \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

14.2.- si el valor de  $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = k$ , calcule el valor de las expresiones:

$$14.2.1.- \begin{vmatrix} b & x \\ a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & x \\ 2b & y \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a+b & x+y \\ b & y \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$$

$$14.2.2.- \begin{vmatrix} 2a & 2x \\ b & y \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2a+y & 2x+y \\ b & y \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -a & x \\ -b & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4a & 2x \\ 2b & y \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 6a & 3x \\ 8b & 4y \end{vmatrix}$$

$$15.- \text{ si } A = \begin{pmatrix} \log_5^{25} & 4\text{sen}30^\circ & -2\text{sen}150^\circ \\ 1 & -e^0 & -2^2 \\ \log_{0,5}^{0,25} & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ B} = \begin{pmatrix} 1 & e^{\log 1} & -1^4 \\ -\text{sen}\pi & \cos\frac{\pi}{2} & 1 \\ -1 & (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Determine la matriz X , que satisface la ecuación:

$$(A + B)(A - B)X + AB = I, \text{ donde I es la matriz unitaria.}$$